Radu Gologan, Ion Cicu, Alexandru Negrescu
(coordonatori)

Florin Bojor
Dana Heuberger

Gheorghe Boroica
Nicolae Mușuroia

Teme Supliment Gazeta Matematică

clasa a XI-a

(2011 – 2016)

Cartea Românească
EDUCAȚIONAL

CUPRINS

Capitolul I
ALGEBRĂ

În cele ce urmează vom trece în revistă câteva noțiuni și proprietăți care sunt mai puțin prezente în manualele școlare, dar care sunt foarte folositoare pentru soluționarea unor probleme de concurs. Pentru detalii și demonstrații se poate consulta lucrarea [4].

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1.1. Definiție. Un număr $\lambda \in \mathbb{C}$ se numește **valoare proprie** a matricei A, dacă există un vector nenul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ (o matrice coloană) astfel încât $AX = \lambda X$.

Un astfel de vector X se numește **vector propriu** al matricei A corespunzător valorii proprii λ.

1.2. Observații:

1) O relație de forma $AX = \lambda X$, $X \neq O_{n,1}$, unde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ și $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, se numește relație de tip valoare proprie – vector propriu.

2) Dacă X_1, X_2 sunt doi vectori proprii ai lui A corespunzători aceleiași valori proprii λ, atunci pentru orice $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, vectorul $X = a_1 X_1 + a_2 X_2$ este un vector propriu al lui A.

3) Mulțimea tuturor valorilor proprii ale matricei A se numește **spectrul matricei** A și se notează cu $Spec(A)$.

1.3. Propoziție. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ este o valoare proprie a lui A, iar $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ este un vector propriu corespunzător, atunci:

a) Pentru orice $k \in \mathbb{N}$, numărul λ^k este o valoare proprie a matricei A^k, iar X este un vector propriu al lui A^k.

b) Pentru orice polinom $f \in \mathbb{C}[X]$ numărul $f(\lambda)$ este o valoare proprie a matricei $f(A)$, iar X este un vector propriu al lui $f(A)$.

c) Dacă A este inversabilă, atunci $\lambda \neq 0$ (o matrice inversabilă nu are valoarea proprie 0) și numărul $\frac{1}{\lambda}$ este o valoare proprie a matricei A^{-1}, iar X este un vector propriu al lui A^{-1}.

1.4. Observații.

a) Pentru $k \in \mathbb{N}^*$, singurele valori proprii ale matricei A^k sunt de forma λ^k, unde λ este o valoare proprie a lui A.

b) Singurele valori proprii ale matricei inverse A^{-1} sunt de forma $\frac{1}{\lambda}$, unde λ este o valoare proprie a lui A.

c) Dacă $f \in \mathbb{C}[X]$, atunci singurele valori proprii ale matricei $f(A)$ sunt de forma $f(\lambda)$, unde λ este o valoare proprie a lui A.

d) În general, mulțimea vectorilor proprii ai matricei A^k sau ai lui $f(A)$ **include strict** mulțimea vectorilor proprii ai matricei A.

1.5. Teoremă. Un număr $\lambda \in \mathbb{C}$ este o valoare proprie a matricei $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, dacă și numai dacă $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

1.6. Definiție. Matricea $(A - \lambda I_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, se numește **matricea caracteristică** a matricei A.
Polinomul $p_A \in \mathbb{C}[X]$, $p_A = \det(A - X \cdot I_n)$ se numește **polinomul caracteristic** al matricei A.
Ecuația polinomială $p_A(x) = 0$ se numește **ecuația caracteristică** a matricei A.

1.7. Teorema Cayley–Hamilton. $p_A(A) = O_n$, adică orice matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este o rădăcină a polinomului său caracteristic.

1.8. Propoziție. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci

$$p_A = (-1)^n (X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} X + (-1)^n \sigma_n),$$

unde σ_k este suma tuturor minorilor diagonali de ordin k ai matricei A (un minor diagonal este format cu linii și coloane de aceiași indici).

1.9. Observații.

a) Notăm cu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ valorile proprii ale matricei $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Dintre coeficienții polinomului său caracteristic, remarcăm:

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \overset{not}{=} \operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n, \text{ numit } \textbf{urma} \text{ matricei } A$$

$$\sigma_2 = \sum_{1 \le i < j \le n} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} = \sum_{1 \le i < j \le n} \left(a_{ii} a_{jj} - a_{ij} a_{ji} \right) = \sum_{1 \le i < j \le n} \lambda_i \lambda_j$$

și

$$\sigma_n = \det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n .$$

În cazul în care $n = 3$, σ_2 este chiar urma matricei adjuncte A^*.

b) Pentru $n = 2$, relația Cayley–Hamilton devine $A^2 - \operatorname{tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = O_2$ iar pentru $n = 3$, $A^3 - \operatorname{tr}(A) \cdot A^2 + \operatorname{tr}(A^*) \cdot A - \det(A) \cdot I_3 = O_3$.

1.10. Propoziție. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci polinoamele caracteristice ale matricelor $A \cdot B$ și $B \cdot A$ coincid, adică $\det(A \cdot B - X \cdot I_n) = \det(B \cdot A - X \cdot I_n)$.

În particular, $\det(A \cdot B - I_n) = \det(B \cdot A - I_n)$.

1.11. Propoziție. Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, numărul

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \ldots & a_3^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

se numește determinant *Vandermonde* și este egal cu

$$\prod_{2 \leq i \leq n} \left((a_i - a_1) \cdot (a_i - a_2) \cdot \ldots \cdot (a_i - a_{i-1}) \right).$$

1.12. Propoziție. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, atunci

$$\det(A + B) + \det(A - B) = 2\left(\det(A) + \det(B)\right).$$

1.13. Propoziție. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu $AB = BA$, atunci $\det\left(A^2 + B^2\right) \geq 0$.

1.14. Teoremă. Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, atunci

$$\operatorname{rang}(A \cdot B) \leq \min\left(\operatorname{rang}(A), \operatorname{rang}(B)\right).$$

1.15. Teoremă. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, atunci

$$\operatorname{rang}(A \pm B) \leq \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B.$$

1.16. Teoremă (Sylvester). Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, atunci are loc inegalitatea:

$$\operatorname{rang}(A \cdot B) \geq \operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B) - n.$$

1.17. Teoremă (Frobenius). Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{C})$ și $C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{C})$, atunci

$$\operatorname{rang}(A \cdot C \cdot B) + \operatorname{rang}(C) \geq \operatorname{rang}(A \cdot C) + \operatorname{rang}(C \cdot B).$$

1.18. Propoziție. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are $\operatorname{rang}(A) = 1$, atunci există $a \in \mathbb{C}$ astfel încât $A^2 = a \cdot A$.

1.19. Observație. Fie $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ și $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Există polinoame nenule din $K[X]$ care au rădăcina A, de exemplu p_A.

1.20. Propoziție. Fie $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ și f un polinom de grad minim printre polinoamele nenule din $K[X]$ care au rădăcina A. Pentru orice $g \in K[X]$ care are rădăcina A, există $q \in K[X]$ astfel încât $g = f \cdot q$, adică f divide g în $K[X]$.

1.21. Observație. Fie $f = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \ldots + a_1 X + a_0$, $a_d \neq 0$, polinomul din enunțul propoziției **1.20**. Polinomul $a_d^{-1} f$ are de asemenea rădăcina A, este monic (are coeficientul dominant egal cu 1) și are tot gradul d.

Dacă f_1 și f_2 sunt două polinoame monice de grad d din $K[X]$ care au rădăcina A, atunci $f_1 = f_2$. Într-adevăr, din **1.20.** rezultă că f_1 și f_2 se divid reciproc în $K[X]$ și fiind monice, obținem că $f_1 = f_2$.

1.22. Definiție. Fie $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ și $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Polinomul monic $m_A \in K[X]$ de grad minim care are rădăcina A se numește **polinomul minimal** al lui A.

1.23. Exemplu. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Polinomul caracteristic al lui A este:

$$p_A = \det(A - X \cdot I_3) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 0 & 2-X & 0 \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix} = -(X-1)(X-2)^2.$$

Divizorii lui p_A sunt $1, X-1, X-2, X^2-3X+2, X^2-4X+4, (X-1)(X-2)^2$.

Polinomul m_A este polinomul de grad minim care are rădăcina A, dintre divizorii lui p_A. Prin calcul, deducem că $m_A = (X-1)(X-2) = X^2 - 3X + 2$.

1.24. Propoziție. Fie $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ și $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Atunci m_A divide p_A în $K[X]$, adică polinomul minimal este un divizor al polinomului caracteristic.

1.25. Definiție. Fie $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $f \in K[X]$ un polinom de grad $k \in \mathbb{N}^*$.

Spunem că f e **reductibil** peste K, dacă există $g, h \in K[X]$ astfel încât $f = g \cdot h$, cu $\text{grad}(g) < k$ și $\text{grad}(h) < k$. În caz contrar, spunem că f este un polinom **ireductibil** peste K.

1.26. Observație. Polinoamele ireductibile peste $\mathbb{C}$ sunt cele de gradul 1, iar peste $\mathbb{R}$, cele de gradul 1 și cele de gradul 2 fără rădăcini reale.

1.27. Observație. Polinomul minimal al unei matrice nu este obligatoriu ireductibil, după cum rezultă din exemplul **1.23**.

1.28. Teoremă (Frobenius). Fie $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ un corp de numere și $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Polinoamele p_A și m_A admit aceiași divizori ireductibili peste K.

Enunțuri

1.1. Fie n un număr par, $n \geq 2$. Arătați că în mulțimea S_{3n} a permutărilor mulțimii $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ există elemente de ordin $n^3 - n$ (ordinul unei permutări σ este cel mai mic număr $k > 0$, pentru care $\sigma \circ \sigma \circ \ldots \circ \sigma =$ permutarea identică, unde compunerea se face de k ori).

Leonard Giugiuc, Turnu Severin (**S:L13.25**)

1.2. Fie $\mathcal{P}$ mulțimea matricelor de ordin n care au pe fiecare linie și pe fiecare coloană un singur element egal cu 1, iar celelalte sunt egale cu 0.

a) Demonstrați că există o funcție bijectivă $\varphi : S_n \to \mathcal{P}$, unde S_n este mulțimea permutărilor de ordin n.

b) Demonstrați că $AB \in \mathcal{P}$, pentru orice $A, B \in \mathcal{P}$.

c) Arătați că orice matrice $A \in \mathcal{P}$ este inversabilă și $A^{-1} \in \mathcal{P}$.

d) Calculați $S = \sum\limits_{A \in \mathcal{P}} (\det(A))^2$.

Marius Perianu, Slatina (**S:L15.341**)

1.3. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Determinați $\sigma \in S_n$ astfel încât pentru orice $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$ să avem $\sum\limits_{i=1}^{k-1} \dfrac{1}{\sigma(i)\sigma(i+1)} = \dfrac{k-1}{k}$.

Dana Heuberger (**4**, SGM 3/2012)

1.4. Calculați maximul expresiei $\sum\limits_{k=1}^{n} |\sigma(k) - k|$, unde σ parcurge S_n, mulțimea permutărilor cu n elemente.

* * * (**8**, SGM 4/2012)

1.5. Pentru $\sigma \in S_{2n}$ considerăm suma $S_\sigma = |1 - \sigma(1)| + |2 - \sigma(2)| + \ldots + |2n - \sigma(2n)|$.

a) Calculați S_π, unde $\pi \in S_{2n}$ este permutarea care are numărul maxim de inversiuni.

b) Calculați $M = \max\limits_{\sigma \in S_{2n}} S_\sigma$.

c) Dacă $\mathcal{A}_n = \{\sigma \in S_{2n} \mid S_\sigma = M\}$, calculați $\dfrac{\operatorname{card}(\mathcal{A}_n)}{\operatorname{card}(S_{2n})}$.

Radu Vasile, Brăila (**S:L15.263**)

1.6. Se consideră permutările $\sigma, \tau \in S_n$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{\tau(k)}$.

Eduard Buzdugan, Slatina (**S:L15.343**)

1.7. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$ și $BA = \begin{pmatrix} x & 60 \\ 2 & y \end{pmatrix}$. Aflați x și y.

Petrică Dicu, Sibiu (**3**, SGM 12/2012)

1.8. Determinați două matrice A și B din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, pentru care $A^3 + B^3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(**S:L16.61**)

1.9. Arătați că, date fiind numerele reale a, b, cu $a > 0$, există o infinitate de matrice $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Rică Zamfir, București (**S:L16.182**)

1.10. Fie $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 50 & 20 \end{pmatrix}$. Arătați că pentru orice număr natural $n \geq 2$ există două matrice X_n, Y_n cu coeficienți în $\mathbb{Q}$, astfel încât $A^n = X_n^2 + Y_n^2$.

Adrian Zanoschi, Iași (**S:L16.148**)

1.11. Determinați matricele X de ordin 2, cu elemente reale, pentru care:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}.$$

Discutați răspunsul după valorile parametrului real m.

Dan Negulescu, Brăila (**8**, SGM 9/2012)

1.12. Determinați matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & 2 \end{pmatrix}$, unde $d = \det(X)$.

Georgeta Burtea, Alexandria (**S:L15.103**)

1.13. Determinați matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ cu proprietatea că $X^u + X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, unde $u = \operatorname{tr}(X)$.

Georgeta Burtea, Alexandria (**S:L15.101**)

1.14. Determinați matricele $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$ care verifică relația $A^2 - 8A + 7I_2 = O_2$.

Aurel Doboșan, Lugoj (**S:L15.305**)

1.15. Fie matricele $A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$, cu $x \in \mathbb{C}$, și $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 20 & 1 & 0 \\ 210 & 20 & 1 \end{pmatrix}$. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{C}$ ecuația $A_x^{20} = B$.

Iuliana Chilom și *Silvia Bumbu*, Bistrița (**S:L15.186**)

1.16. Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$. Determinaţi A^n cu $n \in \mathbb{N}^*$.

Aurel Doboşan, Lugoj (**S:L16.26**)

1.17. Determinaţi matricea A^n, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$.

Petre Năchilă şi *Mihai Vasile* (**S:L13.308**)

1.18. Fie $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$. Calculaţi $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{p_n}{n \cdot 4^{2n}}$, unde p_n reprezintă produsul elementelor nenule ale matricei A^n.

Mirela Dănilă, Constanţa (**S:L16.105**)

1.19. Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculaţi:

a) A^n, $n \in \mathbb{N}^*$;

b) $\lim\limits_{n \to \infty} n^2 \left(1 - \cos \dfrac{s_n \pi}{n}\right)$, unde s_n este suma elementelor matricei A^n.

Narcis Gabriel Turcu, Brăila (**S:L15.266**)

1.20. Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 0}$, cu proprietatea $x_{n+k} + x_{n-k} = x_{5n}$, oricare ar fi $n, k \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq k$. Calculaţi A^n, unde $A = \begin{pmatrix} 1 + x_{2016} & 0 & 0 \\ 2 & 1 + x_{2016} & 0 \\ 3 & 4 & 1 + x_{2016} \end{pmatrix}$.

Carmen Botea şi *Viorel Botea*, Brăila (**S:L15.261**)

1.21. Găsiţi două matrice $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $AB^2A + BA^2B = 2(AB)^2$ şi $AB \neq BA$.

Florin Stănescu, Găeşti (**S:L15.146**)

1.22. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sunt două matrice astfel încât $AB^2A + BA^2B = 2(AB)^2$ şi $\mathrm{tr}(AB) \neq 0$, arătaţi că $AB = BA$.

Florin Stănescu, Găeşti (**S:L15.147**)

1.23. Fie A şi B două matrice pătratice de ordin $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, cu proprietatea că există $\alpha \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $\alpha \cdot AB + A + B = O_n$. Arătaţi că $AB = BA$.

Ciprian Călin, Reşiţa (**S:L14.345**)

1.24. Există matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A^k \neq O_n$ pentru orice $k = \overline{1, 2014}$ şi $A^{2015} = O_n$?

* * * (**S:L15.21**)

1.25. Fie ε o rădăcină cubică nereală a unității. Determinați matricele $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ care verifică relația $A^2 + \varepsilon A + \varepsilon^2 I_n = O_n$.

Silviu Dilimoț Niță, București (**S:L16.21**)

1.26. Fie o tablă cu pătrățele $n \times n$ ($n \geq 2$) colorate fiecare cu una dintre culorile alb sau negru. Pătrățelele negre sunt pe diagonală, iar restul sunt albe. O mutare constă în schimbarea culorilor de pe o linie sau coloană. Este posibil ca după un număr de mutări să obținem două linii cu aceeași culoare?

* * * (**5**, SGM 10/2011)

1.27. Arătați că dacă matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ verifică relația $AB = 3A - 2B$, atunci A și B comută.

Aurel Doboșan, Lugoj (**S:L16.27**)

1.28. Fie A și B două matrice pătratice de ordinul 2013, cu elemente complexe și pentru care există numerele complexe diferite $t_1, t_2, \ldots, t_{2014}$ cu proprietatea $(t_nA + B)^{2013} = O_{2013}$ pentru orice $n = \overline{1, 2014}$. Demonstrați că $A^{2013} = B^{2013} = O_{2013}$.

Cătălin Gherghe, București (**S:L13.110**)

1.29. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$. Presupunem că există numerele complexe a, b și k natural nenul, $k \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $(A - aI_n)^k = (A^{2013} - bI_n)^k = O_n$. Care este relația între numerele a și b?

Petru Todor, Sebeș (**S:L13.62**)

1.30. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu $AB - BA = A$. Arătați că $A^nB - BA^n = nA^n$, pentru orice număr natural $n \geq 2$.

* * * (**S:L16.63**)

1.31. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $A^2 - B^2 = 2(AB - BA)$. Arătați că $(AB - BA)^n = O_n$.

Nicolae Bourbăcuț, Sarmizegetusa (**S:L13.145**)

1.32. Fie matricea $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și scrierea ei unică $B = S + A$, unde $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este simetrică, iar $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este antisimetrică. Presupunem că S și A sunt matrice ortogonale.

a) Arătați că dacă $\operatorname{tr}(B) = 0$, atunci $B^2 = O_2$.

b) Determinați matricele B pentru care $\operatorname{tr}(B) \neq 0$.

Benedict G. Niculescu, București (**S:L15.30**)

1.33. Fie A o matrice de ordin $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, ce are elementele numere reale, cu proprietățile: elementele fiecărei linii sunt în progresie aritmetică cu rația r; elementele fiecărei coloane sunt în progresie geometrică cu rația q. Alegem n elemente din matricea A astfel încât să nu avem două elemente de pe aceeași linie și nici două elemente de pe aceeași coloană. Arătați că, indiferent de alegere, suma acestor n elemente este constantă. Rămâne suma constantă dacă elementele fiecărei linii sunt în progresie aritmetică și elementele fiecărei coloane sunt în progresie aritmetică?

Carmen Botea și *Viorel Botea*, Brăila (**S:L14.222**)

1.34. Fie un tabel cu trei linii și trei coloane. În fiecare căsuță scriem un număr natural așa încât suma numerelor de pe fiecare linie, fiecare coloană și fiecare diagonală să fie aceeaşi, S. Notăm cu n elementul aflat la intersecţia celei de-a doua linii cu cea de-a doua coloană. Demonstraţi că $S = 3n$.

* * * (**S:L14.227**)

1.35. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, cu suma elementelor de pe fiecare linie egală cu -1. Precizaţi suma elementelor de pe linia n a matricei $A^{2014} + A^{2015}$.

Carmen Botea şi *Viorel Botea*, Brăila (**S:L14.223**)

1.36. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice cu proprietatea că suma elementelor de pe fiecare linie este egală cu 3. Aflaţi suma elementelor matricei $B = A + A^2 + \ldots + A^{2015}$.

Carmen Botea şi *Viorel Botea*, Brăila (**S:L15.262**)

1.37. Determinaţi matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A^3 = \begin{pmatrix} 471 & 600 \\ 75 & 96 \end{pmatrix}$, $\mathrm{tr}(A) = 9$, $\mathrm{tr}(A^2) = 69$.

Daniela Haret, Brăila (**S:L13.344**)

1.38. Arătaţi că ecuaţia $X^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$, $a < 0$, $n \in \mathbb{N}$, n par, nu admite soluţii reale.

Geanina Dumitraşcu, Brăila (**S:L13.346**)

1.39. Fie A şi B două matrice pătrate de ordin 2 cu elemente reale, astfel încât:

$$A^2 + B^2 + 2AB = O_2 \text{ şi } \det A = \det B.$$

Calculaţi $\det(A^2 - B^2)$.

Traian Tămîian, Carei (**S:L14.303**)

1.40. Arătaţi că dacă matricele pătrate de ordinul 2, A şi X verifică $AX + XA = X$, iar $\mathrm{tr}\, X = 0$, atunci matricele $(XA)^2$, $(AX)^2$ sunt multiple ale matricei unitate.

* * * (**S:L14.305**)

1.41. Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) $A = O_2$.

2) Există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $(A \cdot A^t)^n = O_2$.

Ovidiu Buică, Ciacova (**S:L16.143**)

1.42. Rezolvaţi în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia $X^2 = A$, unde A este o matrice dată cu $\det(A) = 1$.

Viviana Ene, Constanţa (**S:L16.107**)

1.43. Care este probabilitatea ca, alegând la întâmplare o matrice 3×3, cu elemente din mulţimea $\{0, 1, 2\}$, determinantul ei să fie un număr impar şi urma să fie egală cu 0?

* * * (**S:L14.304**)

1.44. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, astfel încât $AB + BA = O_n$ şi $\det(A - B) = 0$, arătaţi că:

$$\det(A^2 + B^2) = 0.$$

* * * (**1**, SGM 10/2011)

1.45. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, care comută două câte două, astfel încât $A + B + C + D = O_n$. Arătaţi că:

$$\det(BC - AD) \cdot \det(CA - BD) \cdot \det(AB - CD) \geq 0.$$

Nicolae Muşuroia, Baia Mare (**S:L15.222**)

1.46. Considerăm matricele $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C})$ astfel încât BA nu este matricea nulă și există $k \geq 2$ astfel încât $(AB)^k = O_3$. Care sunt numerele naturale nenule n pentru care ecuația $X^n = BA$ are soluții $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?

Petru Todor, Sebeș (**S:L13.61**)

1.47. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care comută. Dacă $\det(A^2 - B^2) > 0$, $\det(A) > 0$ și $\det(B) > 0$, arătați că $\dfrac{1}{\det(A+B)} + \dfrac{1}{\det(A-B)} \geq \dfrac{2}{\det(A)+\det(B)}$.

George-Florin Șerban, Brăila (**S:L15.26**)

1.48. Arătați că nu există matricele de ordin doi cu elemente reale A și B care îndeplinesc simultan condițiile $A^2 + B^2 + 2AB = O_2$ și $\det(A^2 - B^2) < 0$.

Traian Tămîian, Carei (**S:L15.62**)

1.49. Demonstrați că dacă A, B sunt matrice pătratice care comută și care au elemente numere naturale, atunci $\det(A^2 + B^2)$ nu poate lua valoarea 2012.

* * * (**6**, SGM 11/2012)

1.50. Arătați, folosind eventual o descompunere algebrică cunoscută, că dacă pentru două matrice pătratice A, B care comută, cu elemente numere întregi, avem $\det(A^3 + B^3) = p$, cu p număr prim, atunci $\det(A + B)$ nu poate fi decât 1 sau p.

* * * (**5**, SGM 1/2012)

1.51. Considerăm matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Demonstrați că $\det(xA + yB) = ax^2 + by^2 + cxy$, unde $a = \det(A)$, $b = \det(B)$ și $c = \det(A + B) - \det(A) - \det(B)$.

b) Dacă matricele A și B au $\det(B) \geq \det(A) \geq 0$ și dacă $\det(A + B) = 3\det(A) + \det(B)$, arătați că $\det(xA + yB) \geq 0$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

Traian Ianculescu, Zimnicea (**S:L15.102**)

1.52. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă matricele $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comută oricare două, avem întotdeauna $\det(A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA) \geq 0$.

G. Rene, București (**S:L16.30**)

1.53. Fie $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^2 + B^2 + C^2 = AB + BC + CA$. Demonstrați că $(A^2 + B^2 + C^2 - BA - CB - AC)^2 = O_2$.

Daniel Jinga, Pitești (**S:L14.267**)

1.54. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $AB = BA$ și $\det(5A^2 - 6AB + 5B^2) = 0$. Demonstrați că $\det A = \det B$.

Adriana Moraru, Pitești (**S:L14.268**)

1.55. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(-2A + B) = \det(2A + B) = 0$. Calculați $4\det(A) + \det(B)$.

Daniel Sitaru, Drobeta-Turnu Severin (**S:L16.186**)

1.56. Fie $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dacă egalitatea $\det(A + mB + mC) = \det(B + mA + mC)$ are loc pentru $n + 1$ valori distincte ale lui $m \in \mathbb{C}$, arătați că $\det(A) = \det(B)$.

* * * (**S:L15.188**)